Разбор решения задач муниципального этапа всероссийской олимпиады по математике, 2022 год

7 класс

Общие критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Задача 1

Числа от 1 до 100 в произвольном порядке расставили на окружности так, что расстояния между рядом стоящими на окружности числами одинаковы. Для любого числа верно следующее: если рассмотреть 49 чисел, стоящих от него по часовой стрелке, и 49 чисел, стоящих от него против часовой стрелки, то в обеих группах будет поровну чисел, которые меньше его. Какое число стоит напротив числа 73?

Ответ. **74**

Решение. **Рассмотрим число 2. Меньше него только число 1. Так как оно такое единственное, то оно не может быть ни в одной из групп относительно числа 2. Значит, число 1 должно быть напротив 2. Рассмотрим число 4. Чисел, которые меньше него, три — нечётное количество. Значит, одно из них не должно входить ни в одну из групп относительно числа 4, т. е. должно быть напротив. Так как 1 и 2 уже стоят друг напротив друга, то напротив 4 стоит 3. Продолжая аналогичные рассуждения и дальше, получаем, что напротив любого чётного числа стоит нечётное число, которое на 1 меньше его. Таким образом, напротив числа 74 стоит число 73. И наоборот: напротив 73 стоит 74.**

Критерий оценивания задачи 1

- Обоснованное верное решение – 7 баллов
- Только верный ответ – 2 балла
- Ход решения верный, все промежуточные вычисления верные, но в итоге допущена арифметическая ошибка – 6 баллов.
- Делается попытка разобрать все варианты, но что-то не учитывается. Ответ - неверный - до 1 баллов.

Задача 2

На доске записали натуральное число, умножили его на 11, зачеркнули последнюю цифру результата, полученное число умножили на 5, опять зачеркнули последнюю цифру результата и получили число 31. Какое число было записано на доске первоначально ?

Ответ: **57, 58.**

Решение. **Будем решать задачу с конца. На последнем этапе было записано трехзначное число вида 31х, цифру х стерли и получили число 31. Тогда число 31х делится на 5. Таких чисел два – 310 и 315. Рассмотрим первый случай. Чтобы умножением на 5 получить число 310, необходимо записать число 62. Тогда трехзначное число 62у должно делиться на 11. Таким числом является 627. Но тогда у=7 и 627:11=57**

Во втором случае перед умножением на 5 было записано число 63, а перед стиранием последней цифры 63у. Тогда трехзначное число 63у должно делиться на 11. Таким числом является 638. Но тогда у=8 и 638:11=58

Критерий оценивания задачи 2

- Обоснованное верное решение – 7 балов
- Только за верный ответ – 2 балла.
- За решение вида: На доске было записано число 57. Проверим ... И далее проверяется все цепочка - 2 балла (это решение ничем не отличается от верного ответа без обоснования)
- Делается попытка решения с конца, но теряется один из случаев – до 5 баллов.

Задача 3

Родители решили в каникулы своего сына Антона, который учится в 7 классе совершить путешествие по «Золотому кольцу». Они купили билеты для проезда между следующими парами городов:

- ***Иваново и Владимир,***
- ***Ярославль и Кострома,***
- ***Ростов Великий и Суздаль,***
- ***Кострома и Суздаль,***
- ***Ростов Великий и Владимир,***
- ***Ростов Великий и Кострома.***

Билеты были с открытой датой: по каждому билету можно проехать один раз в любую сторону между городами. Антон в итоге смог побывать ровно по одному разу в шести городах. В каком городе могло начаться путешествие? Укажите все возможные варианты.

Ответ: **Иваново или Ярославль.**

Продолжение задачи 3

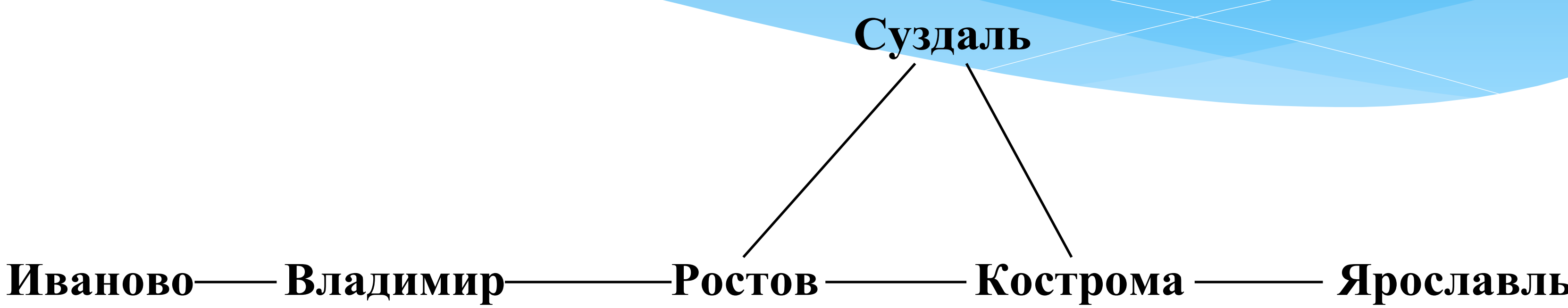


Рисунок к решению задачи 3

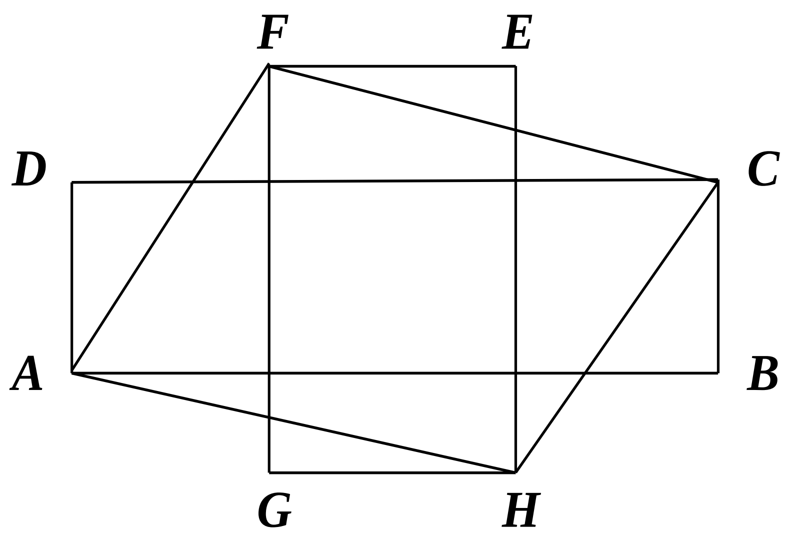
Решение. Все доступные пути изображены на рис 1. Из Иванова и Ярославля выходит по одной дороге, поэтому каждый из этих городов должен быть в пути начальным или конечным. Оба варианта возможны. Маршрут Иваново — Владимир — Ростов— Суздаль — Кострома — Ярославль начинается в Иванове. Если проехать этот маршрут в обратном порядке, то первым городом будет Ярославль.

Критерий оценивания задачи 3

- Обоснованное верное решение – 7 баллов
- Только верный ответ – 4 балла
- Делается попытка разобрать все варианты, но что-то не учитывается. Ответ - неверный - до 2 баллов.

Задача 4

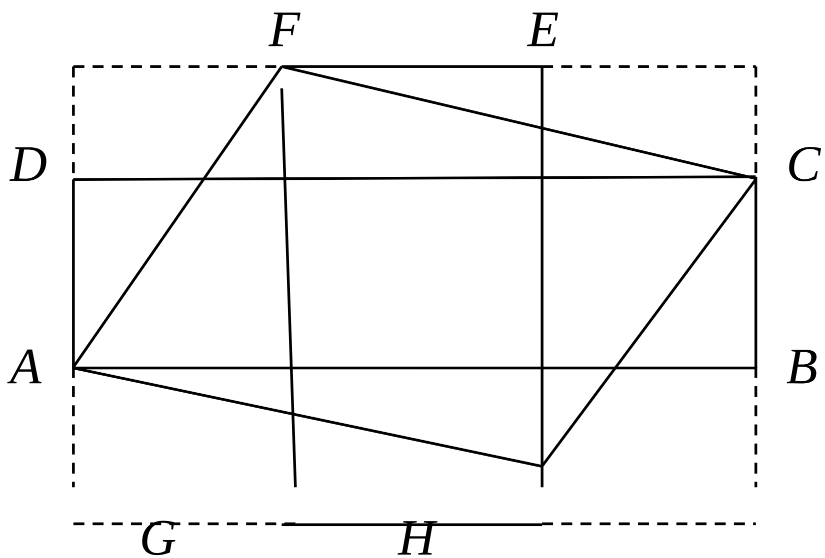
На прямоугольном листе бумаги нарисовали картинку в форме «креста» из двух прямоугольников $ABCD$ и $EFGH$, стороны которых параллельны краям листа. Известно, что $AB = 10, BC = 6, EF = 4, FG = 11$. Найдите площадь четырёхугольника $AFCH$.



Ответ: 67.

Продолжение задачи 4

Решение. **Два исходных прямоугольника в пересечении образуют «маленький» прямоугольник со сторонами 6 и 4. Его площадь равна $6 \cdot 4 = 24$. Продлим отрезки DA, GH, BC, EF до прямых. Они образуют «большой» прямоугольник со сторонами 10 и 11, содержащий «крест» (см. рис.). Его площадь равна $10 \cdot 11 = 110$.**



Продолжение задачи 4

Площадь «большого» прямоугольника состоит из площади «маленького» и площади «кольца», которое, в свою очередь, можно представить как четыре прямоугольника с диагоналями AF, FC, CH, HA. Диагонали делят площадь каждого из этих прямоугольников пополам. Четырёхугольник $AFCH$ состоит из одной половины каждого такого прямоугольника и из «маленького» прямоугольника.

Посчитаем площадь $AFCH$. Площадь «кольца» из четырёх прямоугольников равна разности площадей «большого» и «маленького», то есть $110 - 24 = 86$. Общая площадь четырёх треугольников равна $86 : 2 = 43$. Тогда искомая площадь равна $24 + 43 = 67$.

Критерий оценивания задачи 4

- Только верный ответ – 2 балла
- Построен рисунок 2, но без дополнительных обоснований сразу записан верный ответ - 5 баллов.
- Построен рисунок 2, но ответ неверный - 1 балл.
- Любое полное обоснованное верное решение – 7 баллов

Задача 5

Легко убедиться, что сумма обратных чисел к трем данным числам 2, 3 и 6 равна 1, т.е. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$***. Найдите 2 набора девяти различных натуральных чисел, сумма обратных чисел к которым равна 1.***

Ответ: $\{2, 3, 6, 12, 18, 72, 144, 216, 432\}$ **и**
$\{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 192, 384\}$

Решение. **Уже имеем** $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$**. Продолжим равенство**

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}$$

Получили сумму, состоящую из 5 слагаемых, равную 1. Чтобы продолжить равенство до девяти слагаемых, представим $\frac{1}{36}=\frac{1}{72}+\frac{1}{72}$ **и продолжим предыдущее равенство**

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{72}+\frac{1}{72}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{72}+\frac{1}{144}+\frac{1}{216}+\frac{1}{432}$$

Продолжение задачи 5

Итак, сумма обратных чисел к 2, 3, 6, 12, 18, 72, 144, 216 и 432 равна 1.

Второй набор можно найти аналогично, начиная, например, с равенства

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{192} + \frac{1}{384}$$

Итак, сумма обратных чисел к 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 192 и 384 равна 1.

Критерий оценивания задачи 5

- Ответов может быть бесконечное множество
- Только один верный ответ с проверкой – 2 балла
- Два верных ответа с проверкой – 5 баллов
- Любое полное обоснованное верное решение – 7 баллов